ANNEE :2022.2023
Réaliser par :sow adama kalidou

ETUDE DES DIFFERENTES FONCTIONS:

La fonction logarithme népérien a d'abord été fabriquée pour simplifier les calculs fastidieux des ingénieurs et des physiciens avant l'invention des calculatrices et ordinateurs .

La fonction logarithme népérien est aujourd'hui définie, - soit comme fonction réciproque de la fonction exponentielle , - soit comme primitive de la fonction inverse qui s'annule en 1.

1° La fonction logarithme népérien, notée ln, est la primitive de la fonction inverse, $x \longrightarrow \frac{1}{x}$, sur l'intervalle]0; +∞[, qui s'annule en 1

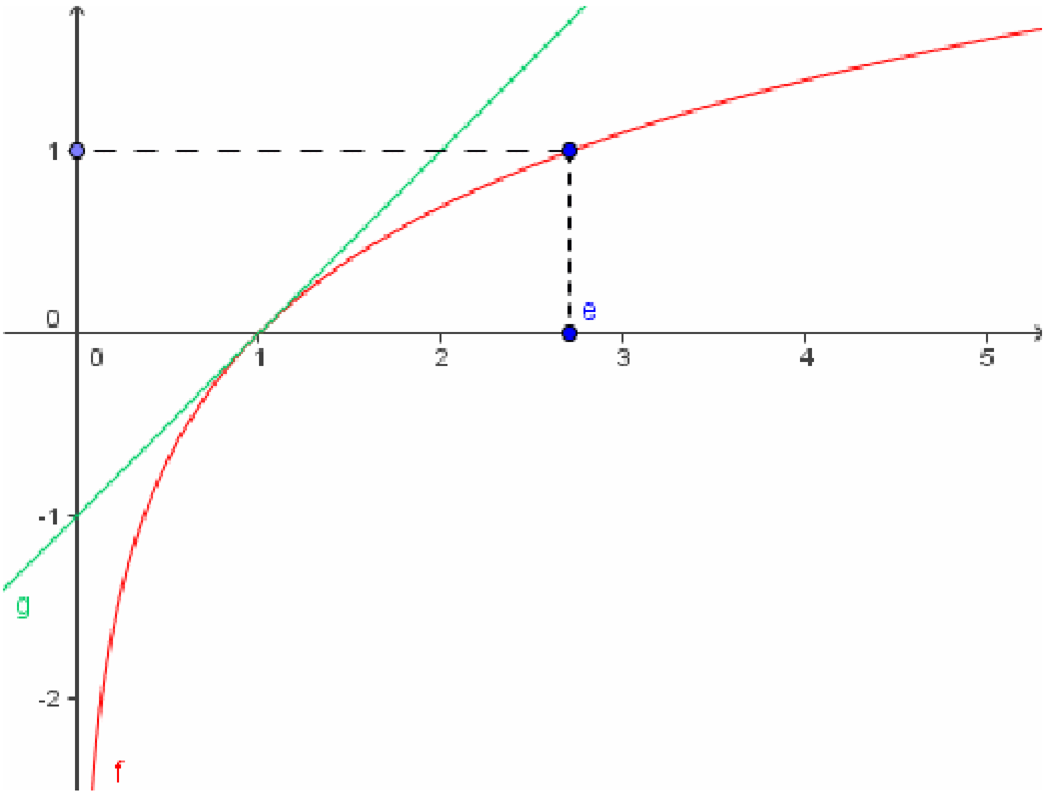
conséquences: ln 1=0 ET ln est définie et dérivable sur l'intervalle]0; +∞[; la dérivée de ln est la fonction inverse $x \longrightarrow \frac{1}{x}$

2° Variations et courbe

- La fonction ln est strictement croissante sur l'intervalle]0; +∞[car sa dérivée est strictement positive sur cet intervalle
- La tangente au point de coordonnées (*1*, 0) a pour coefficient directeur ln'(1)=1; son équation réduite est y=x-1
- L'équation ln x=1 admet une solution unique dans $\mathbb{R}$ cette solution est un irrationnel que l'on note *e*
- tracé de la courbe représentative de la fonction logarithme népérien et de la tangente au point de coordonnées (0; 1)

ANNEE :2022.2023
Réaliser par :sow adama kalidou

ETUDE DES DIFFERENTES FONCTIONS:



3° la fonction logarithme népérien est la réciproque de la fonction exponentielle

pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$

pour tout x>0, $e^{\ln x} = x$

4° propriétés algébriques: Pour tous X>0, Y>0 et y réel, on a

1° L'équation $\ln(x) = -1$ admet pour unique solution

ANNEE :2022.2023
Réaliser par :sow adama kalidou

ETUDE DES DIFFERENTES FONCTIONS:

2° La fonction *f* définie par $f(x)=\ln(x^2)$ **a pour ensemble de définition** [ ]

3° L'ensemble des solutions de l'équation $\ln(x^2)=2$ **est** [ ]

4° On considère la fonction *f* définie par $f(x)=2\ln(x)-3x+2$
a) La fonction dérivée de *f* est définie par $f'(x)=$ [ ]

b) La tangente au point d'abscisse a=1 de la courbe de *f* a pour coefficient directeur [0]

5° a) $e^{\ln x}=x$ **pour tout x appartenant à** [ ]
b) $\ln(e^x)=x$ **pour tout x appartenant à** [ ]

2. La fonction exponentielle

Définition

La fonction exponentielle, notée exp, est :

- Dérivable sur
- f'= f

Conséquences :

ANNEE :2022.2023
Réaliser par :sow adama kalidou

ETUDE DES DIFFERENTES FONCTIONS:

- exp(0) = 1
- exp est dérivable sur

et exp'(x) = exp(x)
- pour tout réel x, exp(x) > 0
-
exp est strictement croissante sur R

Notation

On pose e = exp(1)
A l'aide de la calculatrice, e ≈ 2,718

e≈ 2,718

Par convention, on pose exp(x) = ex pour tout réel x.

Propriétés

Pour tous réels x et y,

exp(x+ y) = exp(x) × exp(y)

Donc
:

exp(x- y) = exp(x) / exp(y)

exp(-y)= 1/exp(y)

exp(nx)= (exp(x))n (avec n entier naturel)

exp(x/n)= n√(exp(x))
(avec n ≥ 1)

cas
particulier : exp(1/ 2) = √(exp(1)) = √e

Limites

- Propriétés asymptotiques

ANNEE :2022.2023
Réaliser par :sow adama kalidou

ETUDE DES DIFFERENTES FONCTIONS:

Lim ex = +∞
x-> +∞

lim ex = 0
x-> -∞

- Croissance comparée

Pour
tout entier naturel non nul n, on a :

- lim ex/ xn = +∞ quand x tend vers +∞

- lim xn ex = 0 quand x tend vers -∞

Remarque
:
A l'infini, l'exponentielle de x l'emporte sur toute puissance de x.

Tableau des variations et courbe représentative

- Tableau
  de variations
- Courbe
  représentative

Dérivée de eu

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
Alors eu est dérivable sur l'intervalle I et on a :

(eu)'= u' × eu

Fonction sinus

Définition

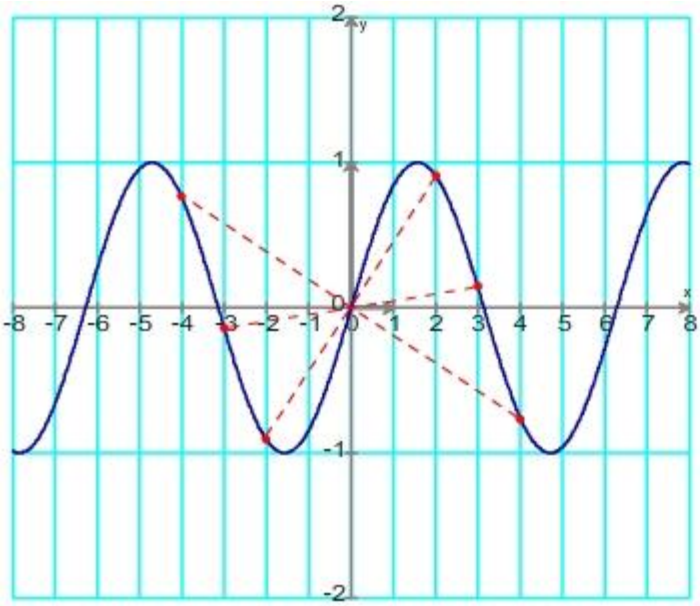
La fonction sinus est la fonction qui à tout réel "x" associe son sinus sin(x). Elle est définie sur l'ensemble des réels (intervalle] $-\infty$, $+\infty$[) et elle est également contiue sur cet intervalle.

Parité

ANNEE :2022.2023
Réaliser par :sow adama kalidou

ETUDE DES DIFFERENTES FONCTIONS:

C'est une fonction impaire puisque pour tout "x" sin(-x) = -sin(x), ce qui se traduit pour sa courbe représentative par une symétrie centrale par rapport à l'origine du repère.



Périodicité

Puisque sin(x + 2π) = sin(x) on qualifie le sinus de fonction périodique de période 2π. Sur une représentation graphique cette périodicité implique que la totalité de la courbe peut être obtenue par translations successives de $2\pi\vec{i}$ ou $-2\pi\vec{i}$ à partir d'une portion de courbe sur un intervalle d'étendue 2π (par exemple [-π ; π] ou [0 ; 2π])

Dérivabilité

par définition

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$(\sin(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x + h) - \sin(x)}{h}$$

$$(\sin(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h}$$

$$\begin{aligned} \text{or } \lim \sin(x)\cos(h) - \sin(x) &= \sin(x)\cos(0) - \sin(x) \\ &= \sin(x).(\cos(0) - 1) \\ &= \sin(x).(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc

ANNEE :2022.2023

Réaliser par :sow adama kalidou

ETUDE DES DIFFERENTES FONCTIONS:

$$(\sin(x))' = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x)\sin(h)}{h}$$

or $\lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$

donc

$$(\sin(x))' = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x).\sin(h)}{h}$$

$$(\sin(x))' = \lim_{h \to 0} \cos(x).1$$

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$

Sur $\mathbb{R}$ la fonction sinus est dérivable et sin'(x) = cos(x)

Variations de la fonction sinus

Puisque la fonction sinus présente une périodicité de 2π il suffit d'étudier ses variations sur l'intervalle [0 ; 2π]

L'étude des ses variations peut être faite à partir de sa dérivée. Puisque sin'(x) = cos(x), la fonction cosinus étant positive sur [0 ; π/2] et [3π/2 ; 2π] et négative sur [π/2 ; 3π/2] on peut en déduire que la fonction sinus est croissante sur [0 ; π/2] et [3π/2 ; 2π] et décroissante sur [π/2 ; 3π/2]

On obtient donc le tableau de variation suivant

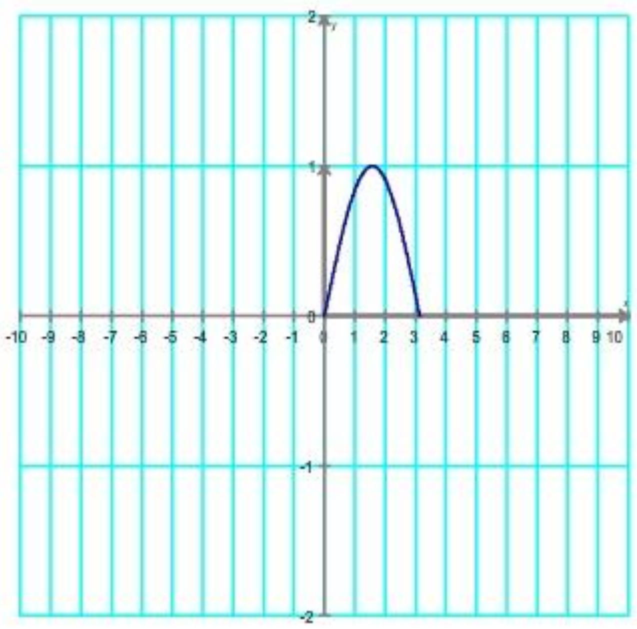
x	0		$\pi/2$		$3\pi/2$		2π
$\sin(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Représentation graphique

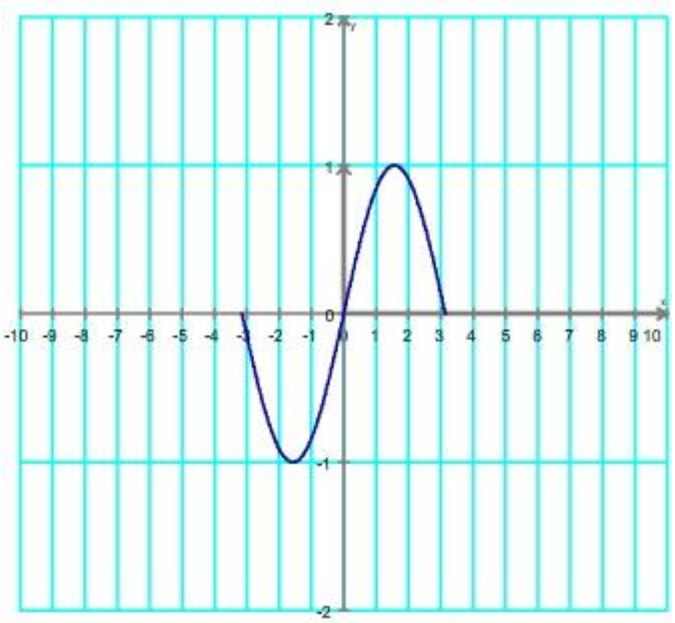
Puisque la fonction sinus est impaire il suffit de tracer sa représentation sur l'intervale [0 ; π]

ANNEE :2022.2023
Réaliser par :sow adama kalidou

ETUDE DES DIFFERENTES FONCTIONS:



Par symétrie centrale on obtient la représentation sur [-π ; 0] on obtient donc la représentation sur l'intervalle [-π ; π] d'étendue 2π

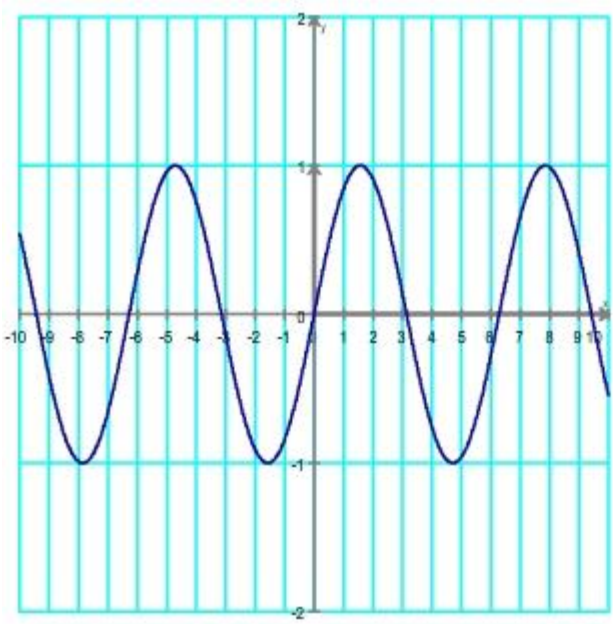


pour obtenir le reste de la courbe il suffit de répéter cette portion par translations successives de $2\pi\vec{i}$ ou $-2\pi\vec{i}$

ANNEE :2022.2023

Réaliser par :sow adama kalidou

ETUDE DES DIFFERENTES FONCTIONS:



Fonction cosinus

Définition

La fonction cosinus est la fonction qui a tout réel "x" associe le cosinus de ce nombre: cos(x). Elle est définie sur l'ensemble des réels (intervalle] $-\infty$; $+\infty$[) et elle est également contiue sur cet intervalle.

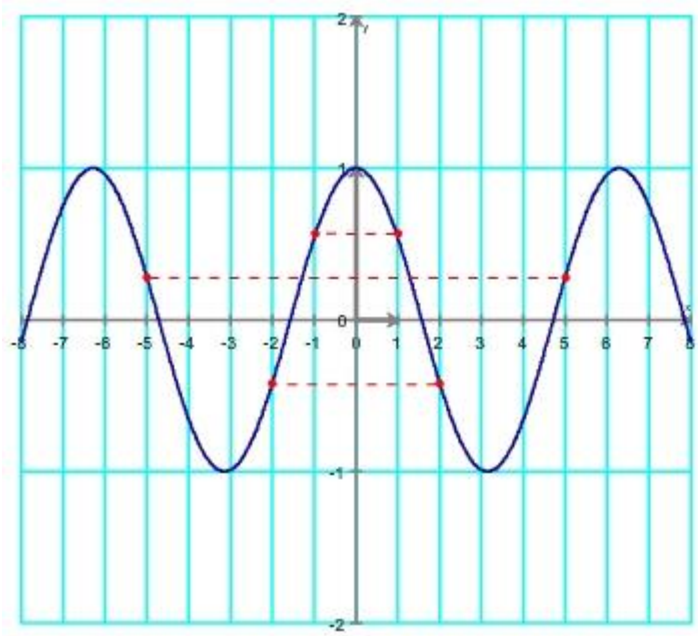
Parité

C'est une fonction paire puisque cos(-x) = cos(x), ce qui se traduit par une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées pour la représentation graphique.

ANNEE :2022.2023

Réaliser par :sow adama kalidou

ETUDE DES DIFFERENTES FONCTIONS:



Périodicité

Puisque cos(x + 2π) = cos(x) on qualifie le cosinus de fonction périodique de période 2π. Sur une représentation graphique cette périodicité implique que la totalité de la courbe peut être obtenue par translations successives de $2\pi\vec{i}$ ou $-2\pi\vec{i}$ à partir d'une portion de la courbe d'étendue 2π (par exemple [-π ; π] ou [0 ; 2π])

Dérivabilité

par définition :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$\cos'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x + h) - \cos(x)}{h}$$

$$\cos'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h}$$

or $\lim_{h \to 0} \cos(x)\cos(h) - \cos(x) = \cos(x)(\cos(h) - 1)$

$= \cos(x).0$

$= 0$

donc:

ETUDE DES DIFFERENTES FONCTIONS:

$$\cos'(x) = \lim_{h \to 0} \underline{-\sin(x)\sin(h)}$$

$$\text{or } \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$$

donc:

$$\cos'(x) = \lim_{h \to 0} -\sin(x).\frac{\sin(h)}{h}$$

$$\cos'(x) = \lim_{h \to 0} -\sin(x).1$$

$$\cos'(x) = -\sin(x)$$

Sur $\mathbb{R}$ la fonction sinus est dérivable et cos'(x) = -sin(x)

<u>Variations de la fonction cosinus</u>

Puisque la fonction cosinus présente une périodicité de 2π il suffit d'étudier ses variations sur l'intrevalle [0 ; 2π]

L'étude des ses variations peut être faite à partir de sa dérivée. Puisque cos'(x) = -sin(x), la fonction sinus étant positive sur [0 ; π] et négative sur [π ; 2π] on peut en déduire que la fonction cosinus est décroissante sur [0 ; π] et croissante sur [π ; 2π]

On obtient donc le tableau de variation suivant

x	*0*		π		2π
f(x)	*1*	↘	*-1*	↗	*1*

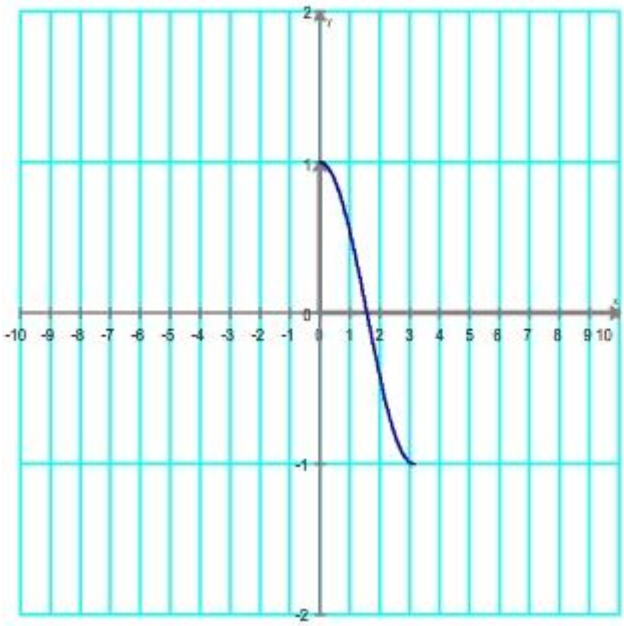
<u>Représentation graphique</u>

Puisque la fonction cosinus est paire il suffit de tracer sa représentation sur l'intervale [0 ; π]

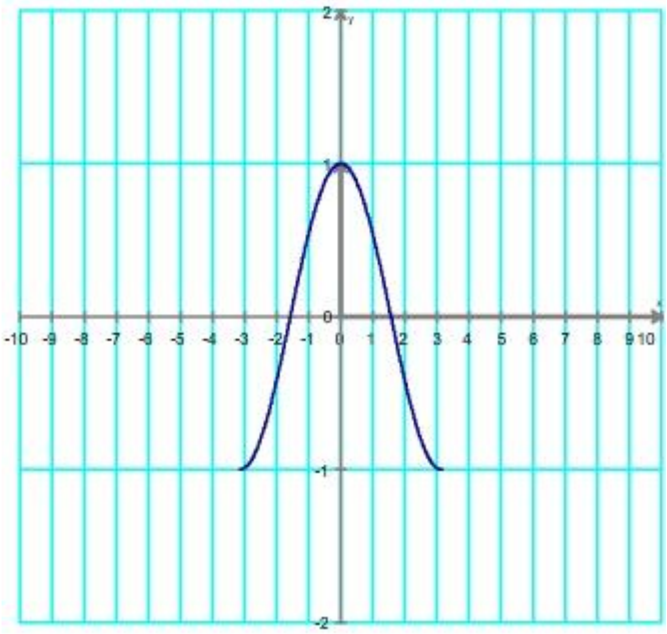
ANNEE :2022.2023

Réaliser par :sow adama kalidou

ETUDE DES DIFFERENTES FONCTIONS:



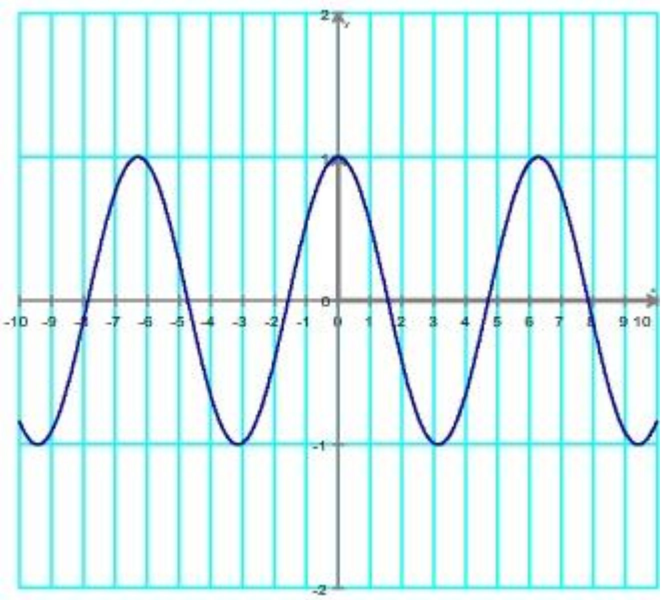
Par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées on obtient la représentation sur [-π ; 0] on a donc la représentation sur l'intervalle [-π ; π] d'étendue 2π



Pour obtenir le reste de la courbe il suffit de répéter cette portion par translations successives de $2\pi\vec{i}$ ou $-2\pi\vec{i}$

ANNEE :2022.2023
Réaliser par :sow adama kalidou

ETUDE DES DIFFERENTES FONCTIONS:



La fonction tangente est définie par :

$$\tan(x) = \sin(x) / \cos(x)$$

1. Donner le domaine de définition de cette fonction.

2. Démontrer que la fonction tangente est périodique de période π.

3. Démontrer que la fonction tangente est dérivable sur son domaine de définition, et donner l'expression de sa dérivée.

4. Dresser le tableau de variations de la fonction tangente sur l'intervalle $]-\pi/2 , \pi/2[$. Préciser les limites au bord du domaine.

5. Donner l'ensemble des points x tels que tan(x) = 0.

Correction de l'étude de la fonction tangente

1. Donner le domaine de définition de cette fonction.

Les fonctions trigonométriques sinus et cosinus sont définies sur **R** tout entier. Comme la fonction tangente est définie sous la forme d'un quotient, il s'agit de trouver les points en lesquels son dénominateur s'annule : ces points ne feront pas partie du domaine de définition de la fonction tangente.

On lit sur le cercle trigonométrique que les points en lesquels la fonction cosinus s'annule sont les multiples impairs de π/2. Une autre manière de le démontrer est d'utiliser les propriétés de la fonction cosinus données dans cet article. En effet, la fonction cosinus est

ANNEE :2022.2023

Réaliser par :sow adama kalidou

ETUDE DES DIFFERENTES FONCTIONS:

périodique de période 2π, et on sait que sur l'intervalle $[0,2\pi[$, elle ne s'annule qu'aux points $\pi/2$ et $3\pi/2$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\cos(x) = 0$ si et seulement si $x = \pi/2 + k\times2\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$ OU $x=3\pi/2 + l\times2\pi$ avec $l \in \mathbf{Z}$: on retrouve bien l'ensemble des multiples impairs de $\pi/2$.

On obtient donc bien que le domaine de définition de la fonction tangente est :

$$\mathbf{R}\backslash\{(2k+1)\pi/2, \text{ avec } k \in \mathbf{Z}\}.$$

2. Démontrer que la fonction tangente est périodique de période π.

Pour tout x dans le domaine de définition de la fonction tangente, on a par définition :

$$\tan(x+\pi) = \sin(x+\pi) / \cos(x+\pi) = -\sin(x) / -\cos(x) = \tan(x)$$

Ainsi, la fonction tangente est bien périodique de période π.

3. Démontrer que la fonction tangente est dérivable sur son domaine de définition, et donner l'expression de sa dérivée.

Les fonctions trigonométriques sinus et cosinus sont continues et dérivables sur **R** tout entier, donc en particulier elles le sont sur l'ensemble de définition de la fonction tangente. Ainsi, cette fonction tangente est définie comme un quotient de fonctions continues et dérivables : elle est donc elle-même continue et dérivable. On a alors l'expression suivante :

$$\tan'(x) = [\ \sin'(x) \cos(x) - \sin(x) \cos'(x)\ ] / \cos^2(x) = (\ \cos^2(x) + \sin^2(x)\ ) / \cos^2(x)$$

On peut résumer cette expression de deux manières différentes – mais bien sûr équivalentes !

$$\tan'(x) = (\ \cos^2(x) + \sin^2(x)\ ) / \cos^2(x) = 1 + (\ \sin^2(x) / \cos^2(x)\ ) = 1 + \tan^2(x)$$

et :

$$\tan'(x) = (\ \cos^2(x) + \sin^2(x)\ ) / \cos^2(x) = 1 / \cos^2(x)$$

4. Dresser le tableau de variations de la fonction tangente sur l'intervalle $]-\pi/2 , \pi/2[$. Préciser les limites au bord du domaine.

La fonction tangente est définie, continue et dérivable sur l'intervalle $]-\pi/2 , \pi/2[$.

On choisit l'expression de la dérivée $\tan'(x) = 1 / \cos^2(x)$, car il est facile d'étudier son signe : pour tout $x \in]-\pi/2 , \pi/2\}[$, $\tan'(x) = = 1 / \cos^2(x) >0$.

Ainsi :

ANNEE :2022.2023
Réaliser par :sow adama kalidou

ETUDE DES DIFFERENTES FONCTIONS:

x	$\frac{-\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	‖	$+$	‖
tan	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

Les limites aux bords du domaine valent respectivement :

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\infty$$

car :

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \sin(x) = -1 \text{ et } \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \cos(x) = 0$$

et de même :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = +\infty$$

car :

ANNEE :2022.2023
Réaliser par :sow adama kalidou

ETUDE DES DIFFERENTES FONCTIONS:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin(x) = 1 \text{ et } \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos(x) = 0$$

5. Donner l'ensemble des points x tels que tan(x) = 0.

Pour tout x dans le domaine de définition de la fonction tangente, tan(x) = 0 si et seulement si sin(x) = 0. On lit sur le cercle trigonométrique que les points x tels que sin(x) = 0 sont les multiples de π. Pour le démontrer en utilisant les propriétés de la fonction sinus répertoriées dans cet article, on peut remarquer que la fonction sinus est périodique de période 2π, et que sur l'intervalle [0,2π[elle s'annule qu'en 0 et en π. Par conséquent, pour tout x dans **R**, sin(x) = 0 si et seulement si x = π+ k×2π avec k ∈ **Z** OU x = 0 + l×2π avec l ∈ **Z**. On retrouve bien l'ensemble des multiples de π.

Reste à vérifier que ces points appartiennent bien au domaine de définition de la fonction tangente (attention à ne pas oublier cette étape !). On constate que c'est le cas : les multiples de π ne sont pas des multiples impairs de π/2 (et ces multiples impairs sont les seuls points de **R** qui n'appartiennent pas au domaine de définition de la fonction tangente).

Par conséquent, la fonction tangente s'annule sur tous les multiples de π.

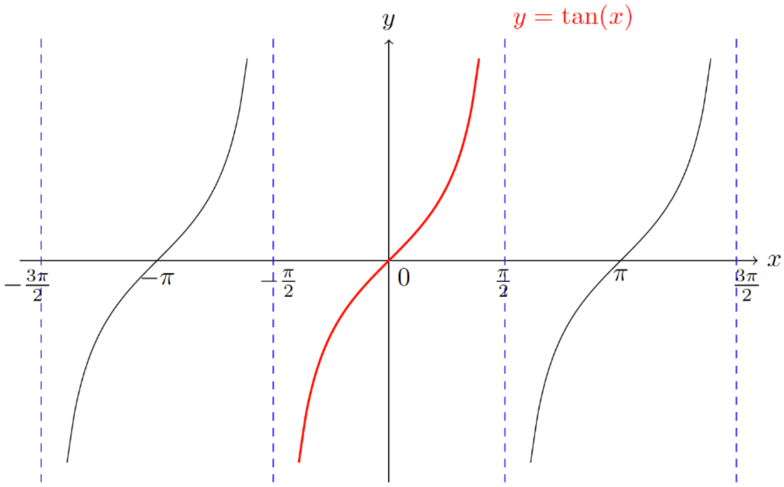
<u>Autre manière de démontrer ce résultat :</u>

On a démontré que la fonction tangente était périodique de période π. Or, d'après le tableau de variations ci-dessus, la fonction tangente ne s'annule qu'en 0 sur l'intervalle]-π/2 , π/2[. Donc pour tout x dans le domaine de définition de la fonction tangente, tan(x) = 0 si et seulement si x = 0+k×π avec k ∈ **Z**. Donc la fonction tangente s'annule sur tous les multiples de π.

En conclusion, et pour mieux visualiser, on trouvera ci-dessous le graphe de la fonction tangente (qu'il est bon de garder en mémoire) !

ANNEE :2022.2023
Réaliser par :sow adama kalidou

ETUDE DES DIFFERENTES FONCTIONS:



En complément de ce cours sur les fonctions trigonométriques, nous te conseillons de lire ou de relire notre article complémentaire

La fonction réciproque de cos est notée arccos, ou parfois cos $^{-1}$.
Nous allons expliquer pourquoi cette notation de arccos,
Tout d'abord, la fonction cos faisant une bijection de [0 ; π] dans [-1 ; 1], arccos fait une bijection de [-1 ; 1] dans [0 ; π].

Ainsi **arccos est définie sur [-1 ; 1].**
Donc arccos(0,8) existe mais pas arccos(2,7) ni arccos (-4,28) par exemple (la calculatrice te mettra ERROR).
De plus arccos est à valeurs dans [0 ; π] :

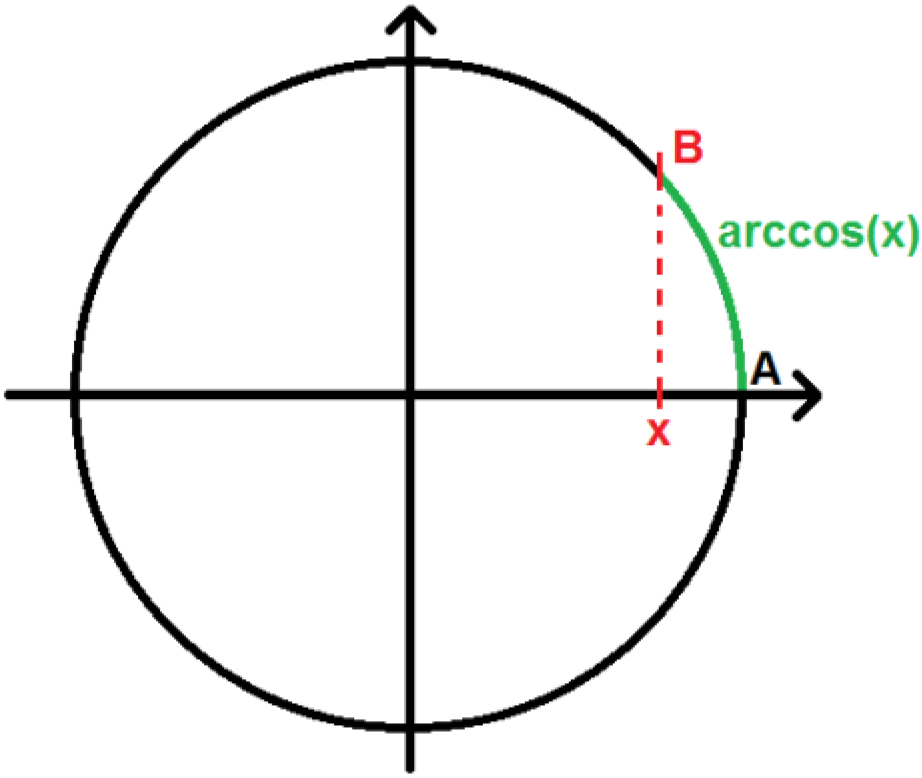
$$\forall\, x \in [-1;1]:$$
$$0 \leq arccos(x) \leq \pi$$

Cela peut être utile pour des tableaux de signe par exemple.

Cela se retient très bien graphiquement avec le cercle trigonométrique.
En effet, si on prend x dans [-1 ; 1] sur l'axe des abscisses, on a un point B correspondant sur le cercle.
La longueur de l'arc de cercle ainsi créé est égale à arccos(x) !

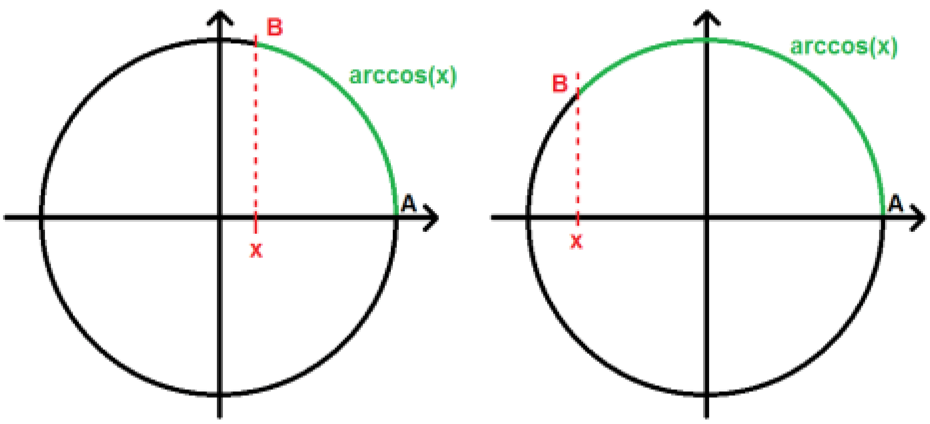
ANNEE :2022.2023
Réaliser par :sow adama kalidou

ETUDE DES DIFFERENTES FONCTIONS:



arccos(x) correspond à l’arc de cercle AB

Arccos(x) correspond à l’**arc** de cercle, d’où la notation de **arc**cos (ce sera pareil pour arcsin).
D’autres exemples avec l’arc de cercle :



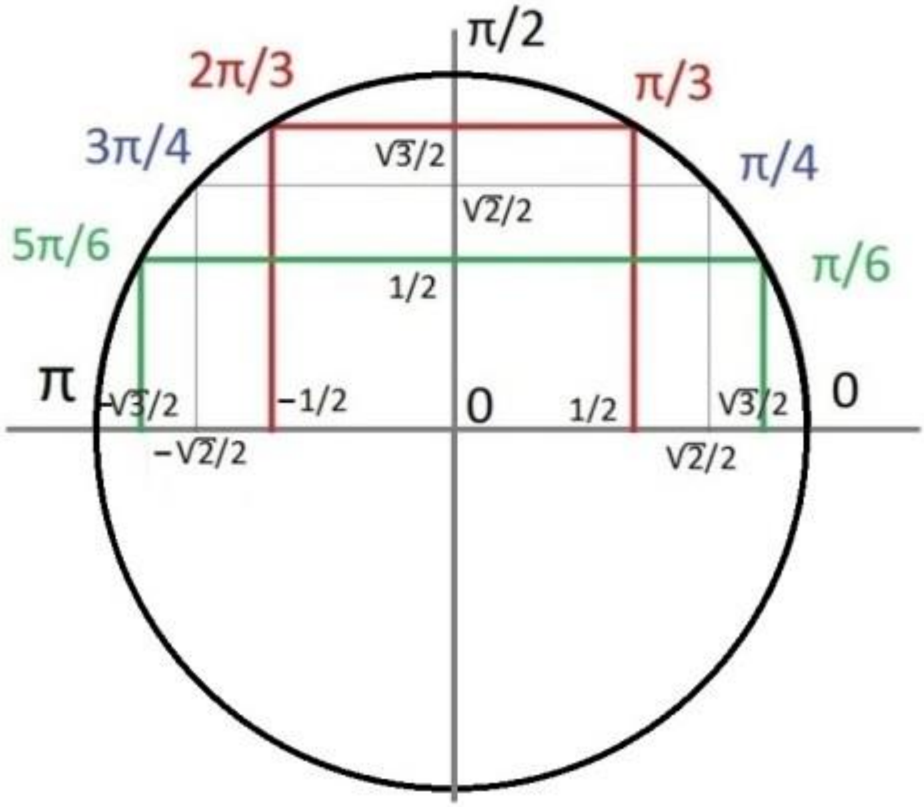
Par ailleurs, on sait que l’arc de cercle correspond à la valeur lue sur le cercle trigonométrique (car celui-ci est de rayon 1).

ANNEE :2022.2023
Réaliser par :sow adama kalidou

ETUDE DES DIFFERENTES FONCTIONS:

Pour lire les valeurs de arccos, on fait donc l'inverse de ce que l'on fait pour lire les valeurs de cos.

Par contre attention, le point B sera toujours dans **le demi-cercle supérieur**, jamais l'inférieur, donc l'arc de cercle aussi.
Ainsi, on prend le cercle trigonométrique mais uniquement avec les valeurs du demi-cercle supérieur :



On voit que cos(π/3) = 1/2 ou cos(5π/6) = -√3/2 par exemple.

Pour arccos c'est l'inverse : arccos(1/2) = π/3 et arccos(-√3/2) = 5π/6

Comme tu le vois c'est très simple !
Par contre attention à bien prendre les valeurs du demi-cercle supérieur, pas inférieur…

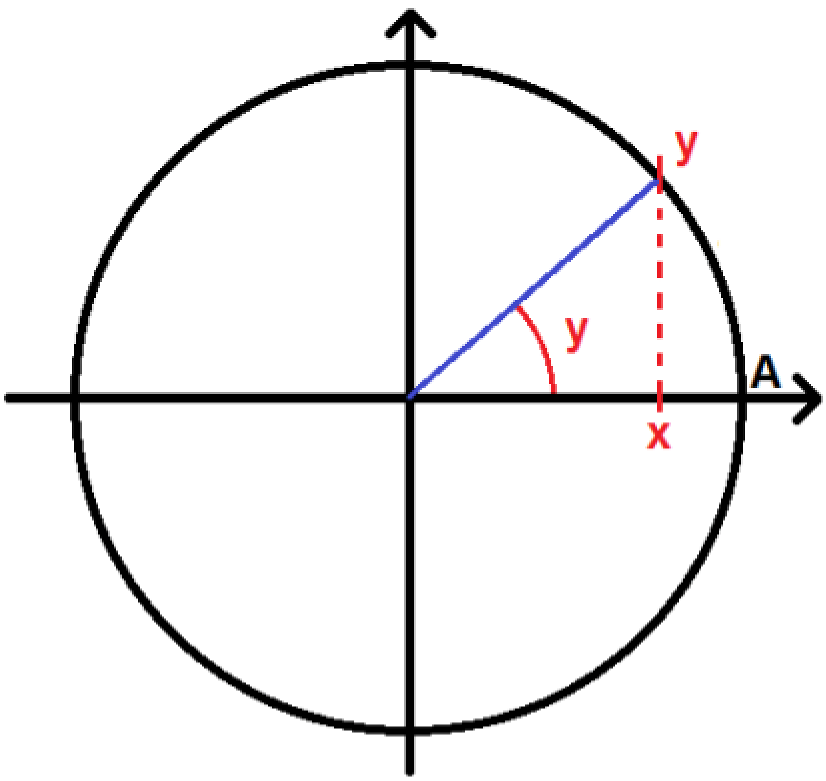
Cette méthode te permet de trouver rapidement la valeur de arccos(x), mais uniquement pour certaines valeurs de x !
En effet, arccos(1/3) par exemple ne correspond à aucune valeur connue sur le cercle, cela se trouve à la calculatrice (ou d'une autre manière suivant l'énoncé).

ETUDE DES DIFFERENTES FONCTIONS:

On peut même aller plus loin sur le graphique.
En effet, arccos est la fonction réciproque de cos, et on a vu que arccos est définie sur [-1 ; 1] à valeurs dans [0 ; π].
Ainsi, d'après on a :

$$\forall\, x \in [-1;1],\ \forall\, y \in [0;\pi]:$$
$$y = arccos(x) \leftrightarrow x = cos(y)$$

Dans cette formule, le x correspond au x vu précédemment sur les graphes ci-dessus.
Le y correspond quant à lui à la valeur sur le cercle trigonométrique, mais également à l'angle



Ainsi, on a :

$$cos(arccos(x)) = x$$

<u>**uniquement pour x ∈ [-1 ; 1]**</u>

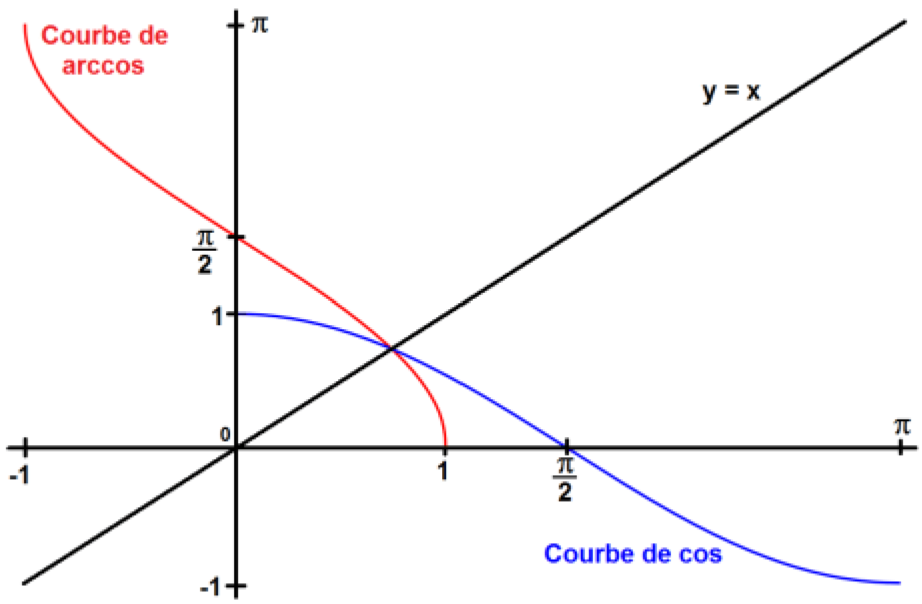
ANNEE :2022.2023
Réaliser par :sow adama kalidou

ETUDE DES DIFFERENTES FONCTIONS:

$$\arccos(\cos(x)) = x$$

<u>uniquement pour x ∈ [0 ; π]</u>

Avec tous ces éléments, on peut trouver plusieurs points et tracer la courbe de la fonction arccos dans un repère :



la courbe de arccos est la symétrique de celle de cos par rapport à y = x, mais uniquement sur la partie où elle est bijective, à savoir [0;π], ce pourquoi cos n'est tracé que sur cet intervalle.

3 valeur particulières sont visibles sur la courbe :

arccos(-1) = π

arccos(0) = π/2

arccos(1) = 0

Ces valeurs sont évidemment les mêmes que celles que l'on trouve avec la méthode du demi-cercle trigonométrique vue précédemment.

Pour terminer sur arccos, calculons sa dérivée.

la dérivée d'une fonction réciproque se trouve avec la formule valable pour tout x de l'ensemble de définition de f^{-1} et tel que f '(f^{-1}(x)) ne s'annule pas :

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

On appliquant cette formule avec f = cos et f^{-1} = arccos, puisque f ' = -sin, on a, pour tout x∈]-1;1[

ANNEE :2022.2023
Réaliser par :sow adama kalidou

ETUDE DES DIFFERENTES FONCTIONS:

$$arccos'(x) = \frac{1}{-sin(arccos(x))}$$

On a dit pour tout x ∈]-1;1[car il s'agit de l'ensemble de définition de arccos, qui est [-1;1], mais privé de -1 et 1 car -sin(arccos(-1)) = -sin(arccos(1)) = 0

Il s'agit donc maintenant de calculer sin(arccos(x)).
On sait que $\cos^2(y) + \sin^2(y) = 1$.
D'où $\sin^2(y) = 1 – \cos^2(y)$
En remplaçant y par arcos(x), on a :
$\sin^2(\arccos(x)) = 1 – \cos^2(\arccos(x))$
$\sin^2(\arccos(x)) = 1 – x^2$
(car x ∈]-1;1[donc cos(arccos(x)) = x).
On a donc :

$$sin(arccos(x)) = \sqrt{1-x^2} \; ou \; sin(arccos(x)) = -\sqrt{1-x^2}$$

Mais comment choisir ??
Il faut tout simplement connaître le signe de sin(arccos(x)).
On a vu que arccos(x) ∈ [0 ; π], or sur cet intervalle le sinus est positif.
Donc sin(arccos(x)) est positif.
D'où :

$$sin(arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

Il ne reste plus qu'à remplacer dans l'expression trouvée précédemment :

$$arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

pour tout x ∈]-1;1[

Retiens bien cette démonstration car il n'est pas forcément évident d'apprendre cette formule, surtout que tu peux facilement la confondre avec celle de arcsin(la même formule mais sans le – au numérateur…).

Au passage, avec l'expression on comprend que x ne peut être égal à -1 ou 1, car à ce moment-là le dénominateur vaudrait 0…

ETUDE DES DIFFERENTES FONCTIONS:

Ainsi **arccos est dérivable sur]-1,1[mais est continue sur [-1,1].**
Passons maintenant à arcsin !

La fonction arcsin

La fonction réciproque de sin est notée arcsin, ou parfois sin $^{-1}$.
Le arc signifie arc de cercle, comme pour arccos, car là encore arcsin va correspond à un arc de cercle.
Tout d’abord, la fonction sin faisant une bijection de [-π/2 ; π/2] dans [-1 ; 1], arcsin fait une bijection de [-1 ; 1] dans [-π/2 ; π/2].

Ainsi **arcsin est définie sur [-1 ; 1]**, comme arccos.
Donc arcsin(0,8) existe mais pas arcsin(2,7) ni arcsin(-4,28) par exemple (la calculatrice te mettra ERROR).
De plus arcsin est à valeurs dans [-π/2 ; π/2] (contrairement à arccos qui est à valeurs dans [0;π]:

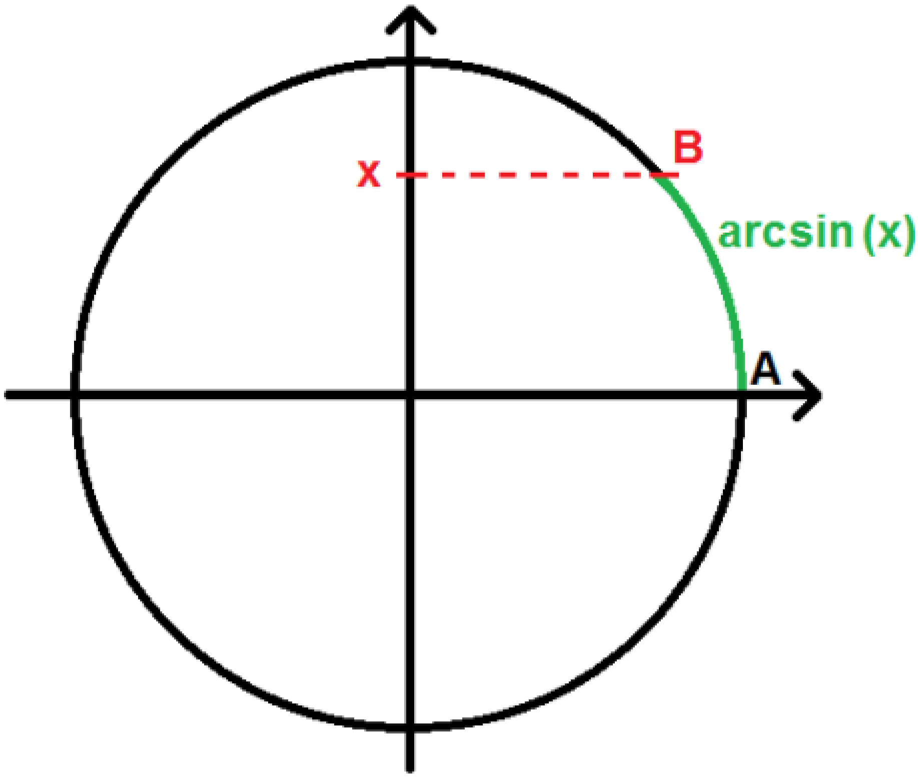
$$\forall\ x \in [-1;1]:$$
$$\frac{-\pi}{2} \leq arcsin(x) \leq \frac{\pi}{2}$$

Cela peut être utile pour des tableaux de signe par exemple.

Cela se retient très bien graphiquement, là encore avec le cercle trigonométrique.
En effet, si on prend x dans [-1 ; 1] sur l’axe des **ordonnées** (et non des abscisses dans le cas de arccos), on a un point B correspondant sur le cercle.
La longueur de l’arc de cercle ainsi créé est égale à arcsin(x) !

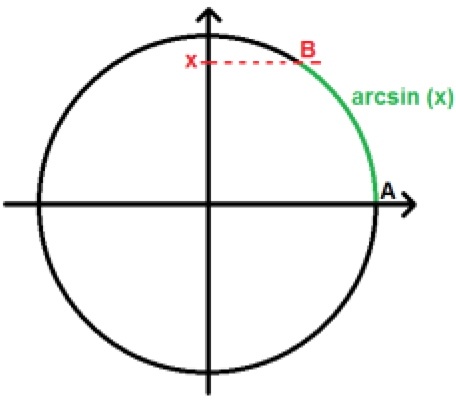
ANNEE :2022.2023
Réaliser par :sow adama kalidou

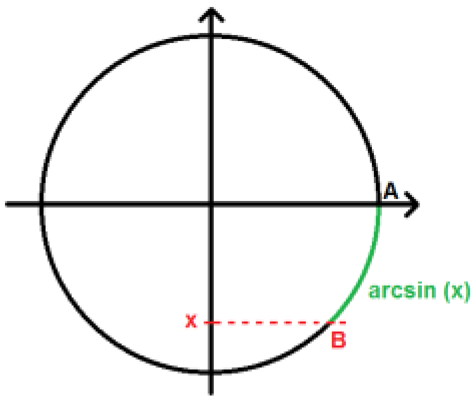
ETUDE DES DIFFERENTES FONCTIONS:



arcsin(x) correspond à l'arc de cercle AB

Arcsins(x) correspond à l'**arc** de cercle, d'où la notation de **arc**sin (comme pour arccos !).
D'autres exemples avec l'arc de cercle :



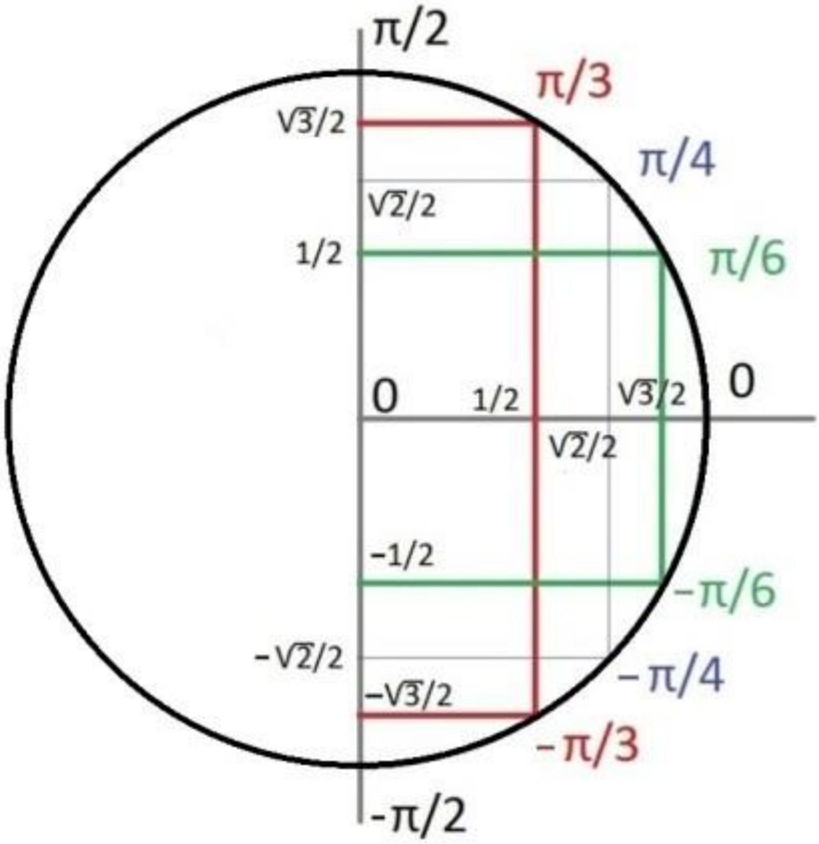


Le principe de lecture des valeurs de arcsin sur le cercle est donc le même que pour arccos.

ANNEE :2022.2023
Réaliser par :sow adama kalidou

ETUDE DES DIFFERENTES FONCTIONS:

Par contre attention, le point B sera toujours dans **le demi-cercle droit**, jamais le gauche, donc l'arc de cercle aussi.
Ainsi, on prend le cercle trigonométrique mais uniquement avec les valeurs du demi-cercle droit, avec les valeurs entre -π/2 et π/2 puisque arcsin(x) est compris entre ces deux valeurs.



On voit que $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ ou $\sin(-\pi/6) = -1/2$ par exemple.

Pour arcsin c'est l'inverse : $\arcsin(\sqrt{3}/2) = \pi/3$ et $\arcsin(-1/2) = -\pi/6$

Comme tu le vois c'est aussi simple que arccos !
Par contre attention à bien prendre les valeurs du demi-cercle droit, pas le gauche…

Cette méthode te permet de trouver rapidement la valeur de arcsin(x), mais uniquement pour certaines valeurs de x !
En effet, arcsin(1/5) par exemple ne correspond à aucune valeur connue sur le cercle, cela se trouve à la calculatrice (ou d'une autre manière suivant l'énoncé).

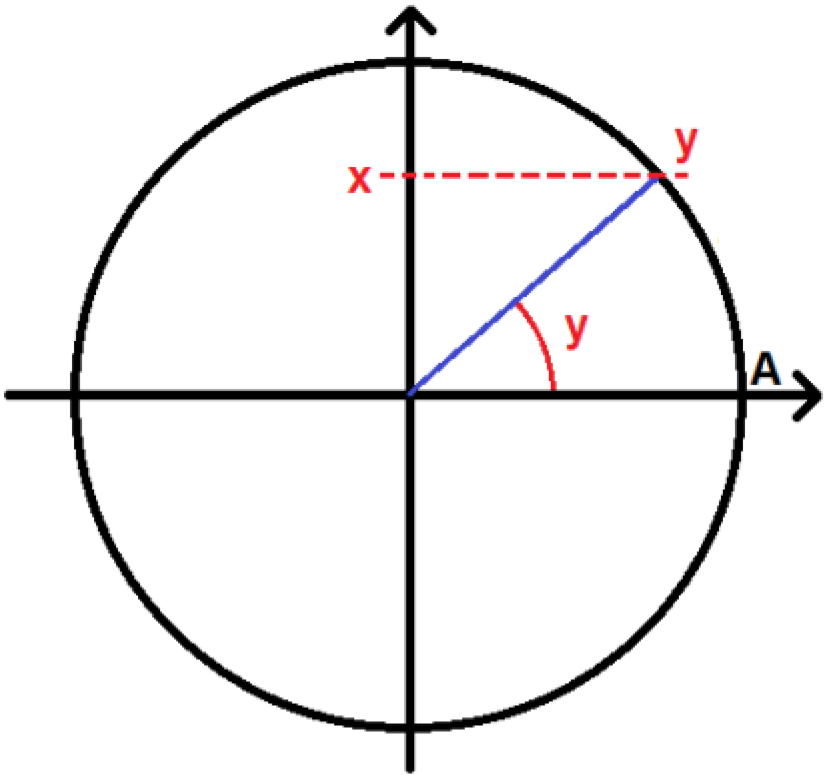
ANNEE :2022.2023
Réaliser par :sow adama kalidou

ETUDE DES DIFFERENTES FONCTIONS:

On peut même aller plus loin sur le graphique.
En effet, arcsin est la fonction réciproque de sin, et arcsin est définie sur [-1 ; 1] à valeurs dans [-π/2 ; π/2].
Ainsi, on a :

$$\forall\, x \in [-1;1],\ \forall\, y \in [-\pi/2;\pi/2]:$$
$$y = arcsin(x) \leftrightarrow x = sin(y)$$

Dans cette formule, le x correspond au x vu précédemment sur les graphes ci-dessus.
Le y correspond quant à lui à la valeur sur le cercle trigonométrique, mais également à l'angle



Ainsi, on a :

$$sin(arcsin(x)) = x$$

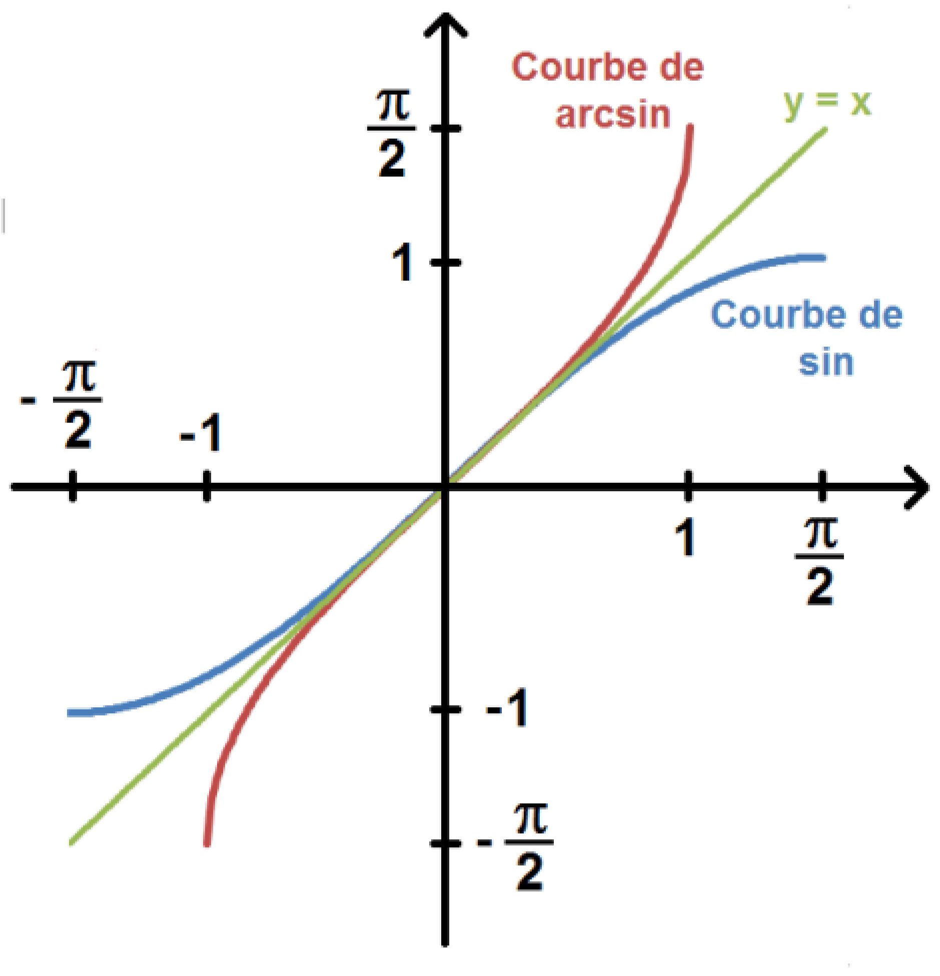
uniquement pour x ∈ [-1 ; 1]

ETUDE DES DIFFERENTES FONCTIONS:

$$arcsin(sin(x)) = x$$

uniquement pour x ∈ [-π/2 ; π/2]

Avec tous ces éléments, on peut trouver plusieurs points et tracer la courbe de la fonction arcsin dans un repère :



la courbe de arcsin est la symétrique de celle de sin par rapport à la droite d'équation y = x, mais uniquement sur la partie où elle est bijective, à savoir sur [-π/2;π/2], ce pourquoi sin n'est tracé que sur cet intervalle.

3 valeur particulières sont visibles sur la courbe :

arcsin(-1) = -π/2

arcsin(0) = 0

arcsin(1) = π/2

Ces valeurs sont évidemment les mêmes que celles que l'on trouve avec la méthode du demi-cercle trigonométrique vue précédemment.

Par ailleurs, on voit que la fonction **arcsin est impaire** :

ANNEE :2022.2023
Réaliser par :sow adama kalidou

ETUDE DES DIFFERENTES FONCTIONS:

$$arcsin(-x) = -arcsin(x)$$

pour tout x ∈ [-1 ; 1]

Pour terminer sur arcsin, calculons sa dérivée.
La méthode sera évidemment la même que pour arccos.
On a vu que la dérivée d'une fonction réciproque se trouve avec la formule valable pour tout x de l'ensemble de définition de f^{-1} et tel que $f'(f^{-1}(x))$ ne s'annule pas :

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

On appliquant cette formule avec f = sin et f^{-1} = arcsin. Puisque f ' = cos, on a, pour tout x ∈]-1;1[

$$arcsin'(x) = \frac{1}{cos(arcsin(x))}$$

On a dit pour tout ∈]-1;1[car il s'agit de l'ensemble de définition de arcsin ([-1;1]) mais privé de -1 et 1 car cos(arcsin(-1)) = cos(arcsin(1)) = 0

Il s'agit donc maintenant de calculer cos(arcsin(x)).
On sait que $\cos^2(y) + \sin^2(y) = 1$.
D'où $\cos^2(y) = 1 - \sin^2(y)$
En remplaçant y par arsin(x), on a :
$\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - \sin^2(\arcsin(x))$
$\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2$
(car x ∈]-1;1[donc sin(arcsin(x)) = x).
On a donc :

$$cos(arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2} \; ou \; cos(arcsin(x)) = -\sqrt{1-x^2}$$

Mais comment choisir ??
Il faut tout simplement connaître le signe de cos(arcsin(x)).
On a vu que arcsin(x) ∈ [-π/2 ; π/2], or sur cet intervalle le cosinus est positif.
Donc cos(arcsin(x)) est positif.
D'où :

$$cos(arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

ETUDE DES DIFFERENTES FONCTIONS:

Il ne reste plus qu'à remplacer dans l'expression trouvée précédemment :

$$arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

pour tout x ∈]-1;1[

On trouve la même dérivée que pour arccos mais sans le – au numérateur !
Retiens bien cette démonstration car il n'est pas forcément évident d'apprendre cette formule, surtout que tu peux facilement la confondre avec celle de arccos…

Au passage, avec l'expression on comprend que x ne peut être égal à -1 ou 1, car à ce moment-là le dénominateur vaudrait 0…

Ainsi **arcsin est dérivable sur]-1,1[mais est continue sur [-1,1]**, comme arccos !

La fonction arctan

Si l'étude des fonctions arccos et arcsin est similaire, celle de arctan est un peu différente.

La fonction réciproque de tan est notée arctan, ou parfois tan $^{-1}$.
Là encore nous expliquerons pourquoi cette notation de arctan.
Tout d'abord, la fonction tan faisant une bijection de]-π/2 ; π/2[dans ℝ, arctan fait une bijection de ℝ dans]-π/2 ; π/2[.

Ainsi **arctan est définie sur** ℝ (c'est une grosse différence avec arccos et arcsin).
De plus arctan est à valeurs dans]-π/2 ; π/2[:

$$\forall\ x \in \mathbb{R}:$$
$$\frac{-\pi}{2} < arctan(x) < \frac{\pi}{2}$$

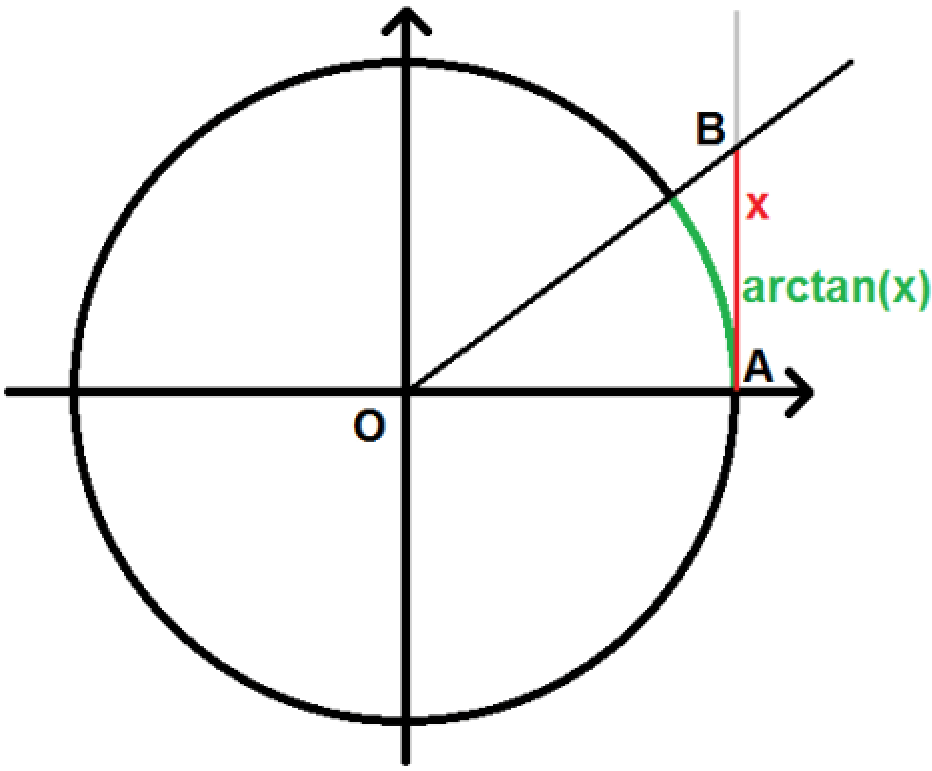
Cela peut être utile pour des tableaux de signe par exemple.

Cela se retient très bien graphiquement avec le cercle trigonométrique.
En effet, on trace la verticale passant par le point (1 ; 0), qui correspond à 0 radian : on a

ANNEE :2022.2023
Réaliser par :sow adama kalidou

ETUDE DES DIFFERENTES FONCTIONS:

ainsi un axe vertical dirigé vers le haut.
On prend x et on le place sur cet axe vertical : on obtient un point B sur l’axe.
On trace (OB), ce qui délimite un arc de cercle : la longueur de cet arc de cercle ainsi créé est égale à arctan(x) !

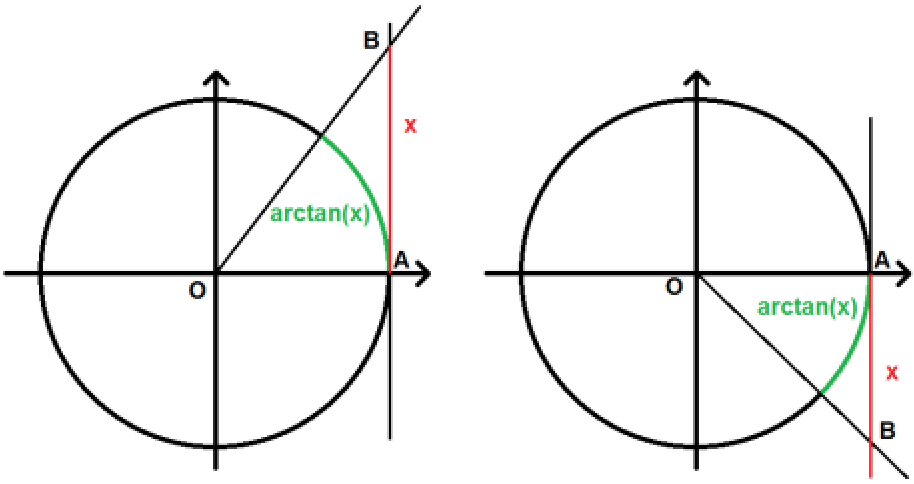


arctan(x) correspond à l’arc de cercle AB

Arctan(x) correspond à l’**arc** de cercle, d’où la notation de **arc**tan, comme pour arccos et arcsin !
D’autres exemples avec l’arc de cercle (le cas de droite représente le cas x <0):

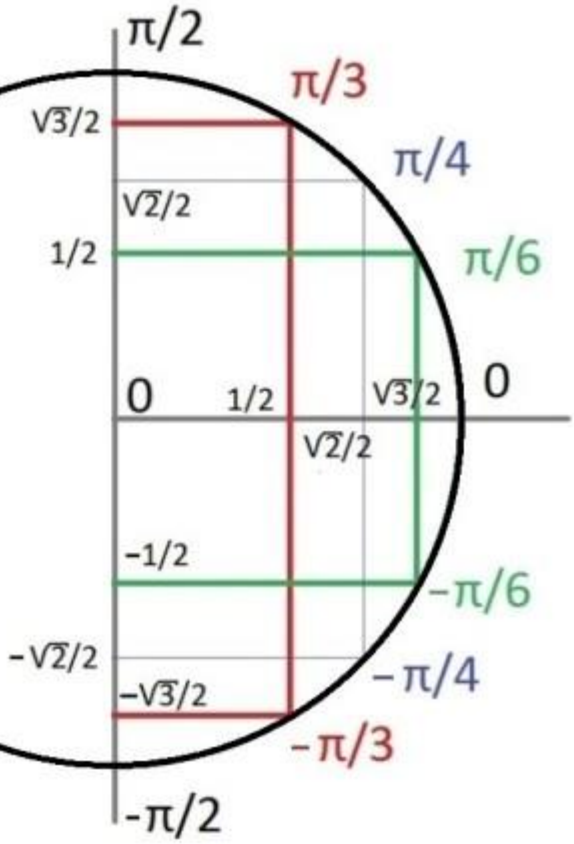
ANNEE :2022.2023
Réaliser par :sow adama kalidou

ETUDE DES DIFFERENTES FONCTIONS:



A noter que, quand x < 0 comme dans le cas de droite, l'arc de cercle est compté négativement, donc arctan(x) < 0. Contrairement à arccos et arcsin, il est difficile de lire graphiquement les valeurs de tan et arctan. Par contre attention, l'arc de cercle sera toujours dans **le demi-cercle droit**, jamais le gauche.
Ainsi, on prend le cercle trigonométrique mais uniquement avec les valeurs du demi-cercle droit, comme pour arcsin, car arctan est à valeurs dans]-π/2 ; π/2[:

ETUDE DES DIFFERENTES FONCTIONS:



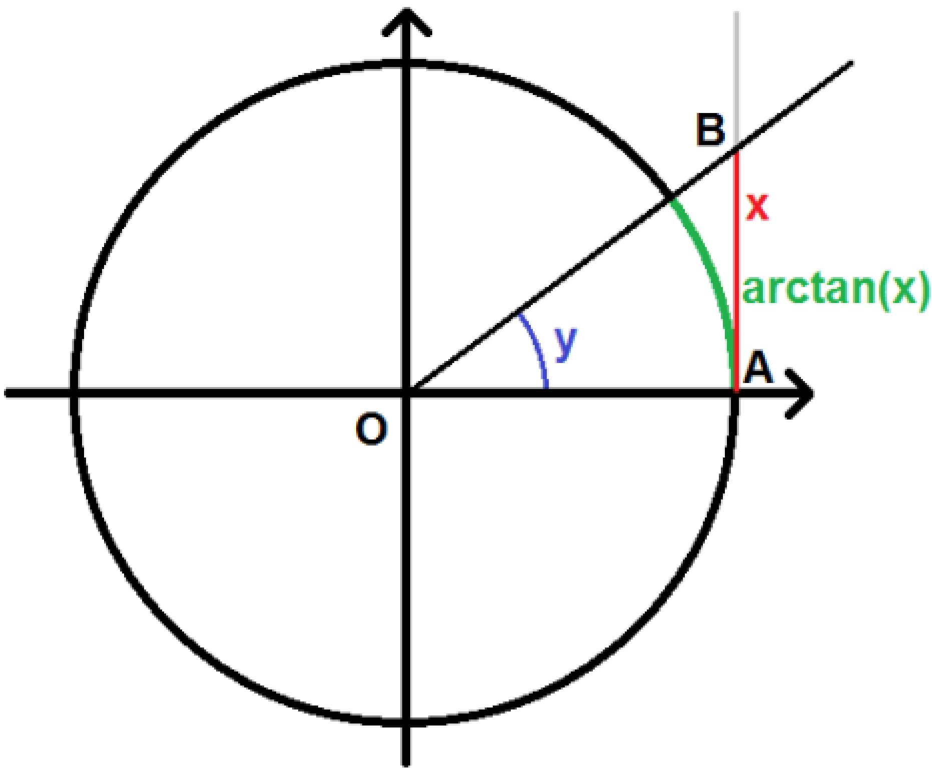
On peut aller plus loin sur le graphique.
En effet, arctan est la fonction réciproque de tan, et on a vu que arctan est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans]-π/2 ; π/2[.
Ainsi, on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \left]-\pi/2 ; \pi/2\right[:$$
$$y = arctan(x) \leftrightarrow x = tan(y)$$

Dans cette formule, le x correspond au x vu précédemment sur les graphes ci-dessus.
Le y correspond quant à lui à la valeur sur le cercle trigonométrique, mais également à l’angle

ANNEE :2022.2023
Réaliser par :sow adama kalidou

ETUDE DES DIFFERENTES FONCTIONS:



Ainsi, on a :

$$\tan(\arctan(x)) = x$$

pour tout réel x

$$\arctan(\tan(x)) = x$$

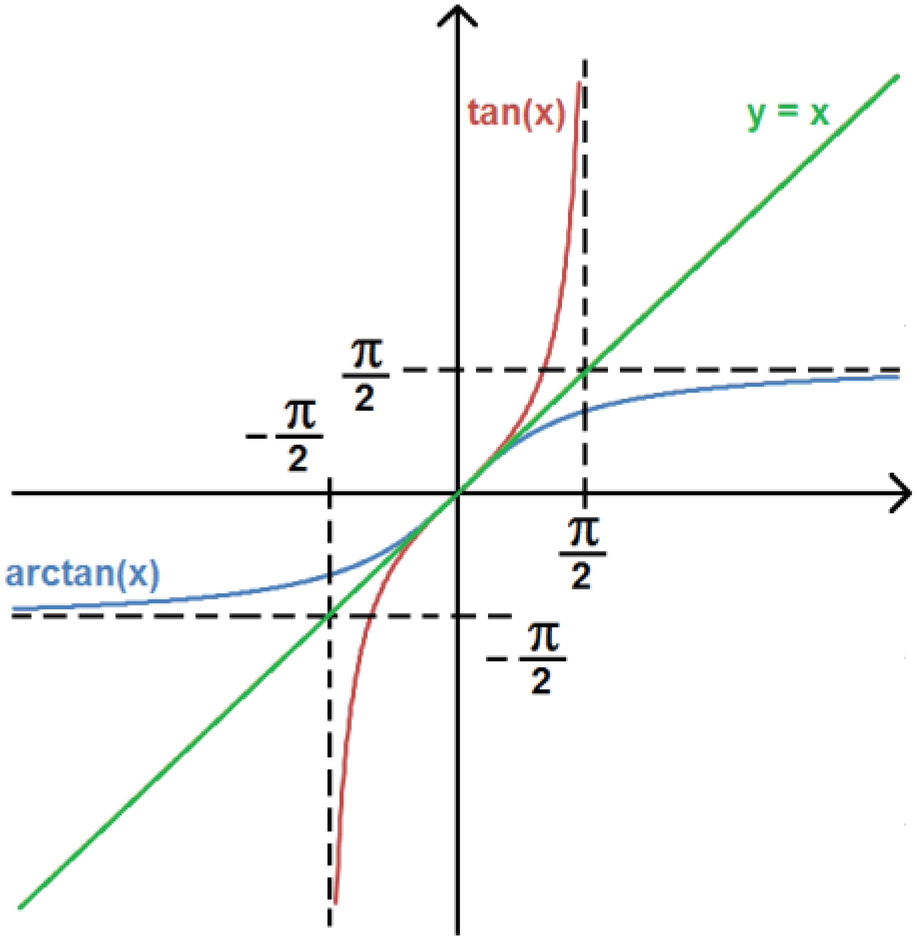
uniquement pour x ∈]-π/2 ; π/2[

Avec tous ces éléments, on peut trouver plusieurs points et tracer la courbe de la fonction arcctan dans un repère :

ANNEE :2022.2023

Réaliser par :sow adama kalidou

ETUDE DES DIFFERENTES FONCTIONS:

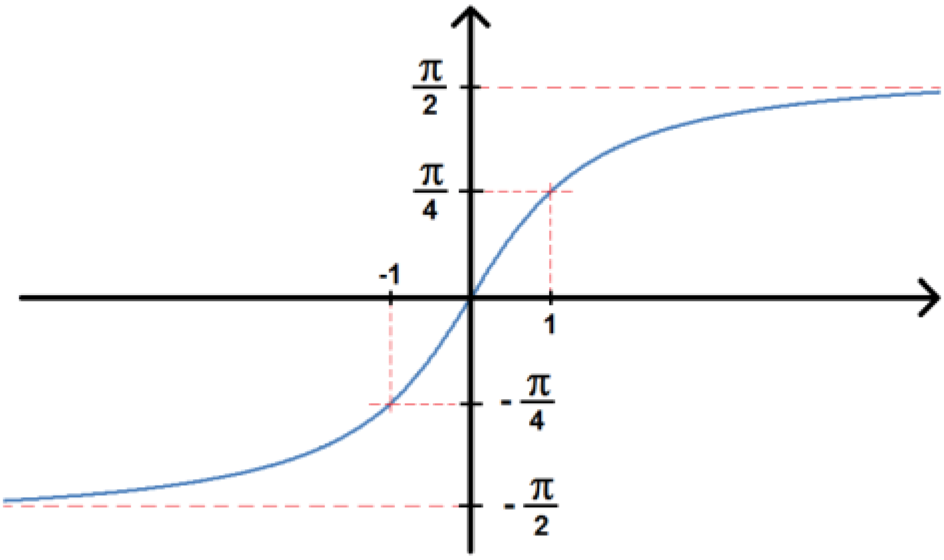


la courbe de arctan est la symétrique de celle de tan, mais uniquement sur la partie où elle est bijective, à savoir sur l'intervalle]-π/2;π/2[, ce pourquoi tan n'est tracé que sur cet intervalle.

Comme le graphique précédent est un peu chargé, nous l'avons refait avec uniquement la fonction arctan pour que tu visualises mieux la fonction :

ANNEE :2022.2023
Réaliser par :sow adama kalidou

ETUDE DES DIFFERENTES FONCTIONS:



3 valeur particulières sont visibles sur la courbe :
arctan(0) = 0
arctan(1) = π/4
arctan(-1) = -π/4

On peut également parler des limites :

$$\lim_{x \to +\infty} arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$$

On a donc deux asymptotes horizontales : y = π/2 en +∞ et y = -π/2 en -∞.

De plus, on voit sur la courbe que **arctan est impaire** :

$$arctan(-x) = -arctan(x)$$

Pour terminer sur arctan, calculons sa dérivée.
La méthode sera évidemment la même que pour arccos et arcsin.
On a vu que la dérivée d'une fonction réciproque se trouve avec la formule valable pour tout x de l'ensemble de définition de f^{-1} et tel que $f'(f^{-1}(x))$ ne s'annule pas :

ETUDE DES DIFFERENTES FONCTIONS:

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

On appliquant cette formule avec f = tan et f^{-1} = arctan. Puisque f ' = 1 + $\tan^2$, on a, pour tout x ∈ ℝ :

$$arctan'(x) = \frac{1}{1 + tan^2(arctan(x))}$$

$$arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

pour tout x ∈ ℝ

Retiens bien cette démonstration car il n'est pas forcément évident d'apprendre cette formule, et elle se retrouve souvent (en particulier dans les calculs d'intégrales…).

Au passage, avec l'expression on comprend que arctan' est bien définie sur ℝ .Ainsi **arctan est définie et dérivable sur ℝ.**